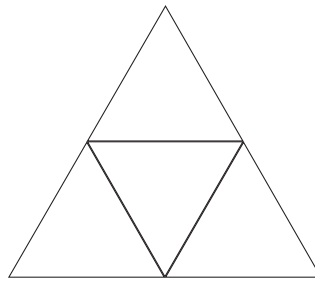


Actividades • En el supermercado

Construye tetraedros

Para construir un tetraedro puedes usar una plantilla formada por cuatro triángulos, como esta:



➡ Pero no es la única plantilla con la que puedes conseguir formar un tetraedro. Utiliza los triángulos de plástico que tienes en la exposición para buscar otros modelos y construye con cada uno de ellos un tetraedro.

A mediados de los años 50 el mundo de los envases se revolucionó con la aparición de los tetrabriks. Los primeros tenían forma de tetraedro (de ahí el nombre). Eran de fácil fabricación industrial. Puedes repetir el proceso tú mismo:

➡ Toma una hoja de papel y enróllala pegando los lados para formar un cilindro. Fíjate en los modelos de envases tetraédricos que tienes disponibles en la exposición y piensa en cómo pasar del cilindro al tetraedro. Explica cómo lo consigues.

➡ ¿Qué relación tiene que haber entre los lados de la hoja de partida para que el tetraedro sea regular?

➡ ¿Por qué crees que se dejaron de fabricar?

Actividades • En el supermercado

Envases de leche

Hace unos años todas las cajas de leche eran como la de la marca *Puleva* que tienes delante. Sin embargo, como puedes comprobar, algunas empresas optaron por cambiar el diseño de su envase.

- ☞ ¿Por qué crees que los modificaron? Para responder, acuérdate de lo que has leído en los carteles: algunas empresas buscan utilizar menos material, otras que sea de mejor manejo para sus clientes, otras quieren distinguirse con un diseño original... Así que mide (tienes los envases también desplegados), haz cálculos, coge las cajas, imagina su uso..., y aventúrate a escribir un motivo o dos.
- ☞ Describe cuáles son las diferencias y similitudes geométricas entre los envases de *Asturiana* y *Pascual*.
- ☞ Intenta construir los envases de *Asturiana* y *Puleva* con los modelos en papel que tienes entre el material de la exposición.

Actividades • En el supermercado

Envases sin esquinas

Los dos envases que puedes ver son muy pequeños; uno es de olivas de la marca *Hacendado* y el otro es de atún de *Ortiz*.

- ☞ **Calcula el volumen de los dos. El de las olivas es un cilindro, así que es fácil. Para el de atún, tendrás que pensar cómo calcularlo, o aproximarlo. ¿Hay mucha diferencia entre los dos?**
- ☞ **Si incrementáramos la altura de cada uno de los envases 1 cm, ¿seguirían teniendo el mismo volumen? ¿Por qué? No hace falta hacer cuentas para resolver esta cuestión, solo pensar.**
- ☞ **Si aumentamos la altura del envase de olivas 1 cm, ¿calcula la altura que debe tener el de atún para que el volumen de ambos recipientes siga siendo igual?**
- ☞ **El peso neto de un producto es lo que pesa todo el contenido de la lata. El escurrido, es lo que pesa al quitarle el líquido, es decir, lo que realmente pesa el producto que nos venden. ¿En cuál de los dos envases el peso escurrido es mayor? ¿Qué porcentaje representa en cada caso el peso escurrido sobre el neto?**

La empresa de quesos *etxegarai* decidió fabricar un envase que parece una porción de un queso más grande.

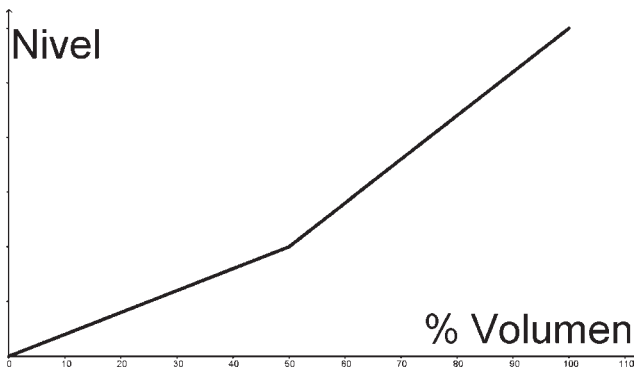
- ☞ Si todas las porciones fueran iguales, ¿cuántas tendría el hipotético queso total?
- ☞ ¿Cuánto pesaría ese queso si la densidad del mismo es $1,4 \text{ g/cm}^3$?

El mundo de los perfumes se preocupa más de la estética de sus envases, que de otros aspectos. Muchas veces, incluso denotan cierto sentido machista en sus diseños. Todo lo que ves son frascos de perfumes.

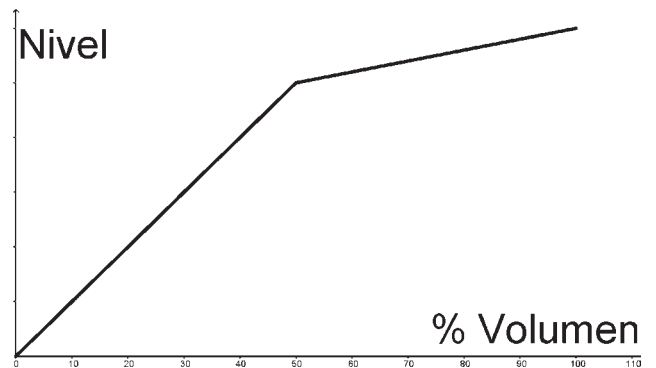
- ☞ Hay uno de ellos que está claramente destinado a hombres y otro a mujeres. ¿Cuáles son? ¿Por qué?
- ☞ El frasco de *Mango* nos recuerda a un objeto pero no acabamos de identificar a cuál. Cógelo, míralo por todas partes, ¿a ti a qué objeto te recuerda?
- ☞ Uno de ellos lo han diseñado con dos figuras geométricas muy conocidas. ¿Qué envase es y cuáles son esas figuras geométricas?
- ☞ El frasco de *Agua de Lavanda Puig* es un trozo de pirámide (lo que se llama un tronco de pirámide), de base triangular. ¿Cuánto mediría la altura de la pirámide de la que el frasco es una parte?

Imagina que tenemos que rellenar los cuatro envases de que dispones para realizar esta actividad.

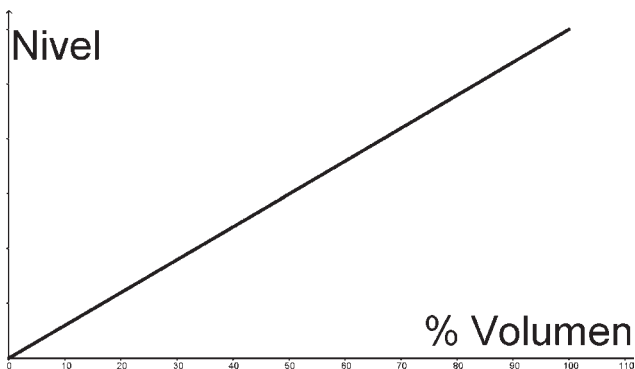
Supongamos que se llenan todos al mismo ritmo, es decir, el grifo vierte el mismo caudal para cada uno de ellos. Sin embargo, la altura que alcanza el líquido en cada uno de los recipientes será distinta en cada momento, pues las formas de los envases son distintas. Si se representan en unos ejes el porcentaje de volumen y la altura o nivel que alcanza el líquido en el frasco, podremos visualizar el ritmo de llenado a través de una gráfica. Aquí tienes cuatro gráficas que corresponden a la manera de llenarse algunos recipientes:



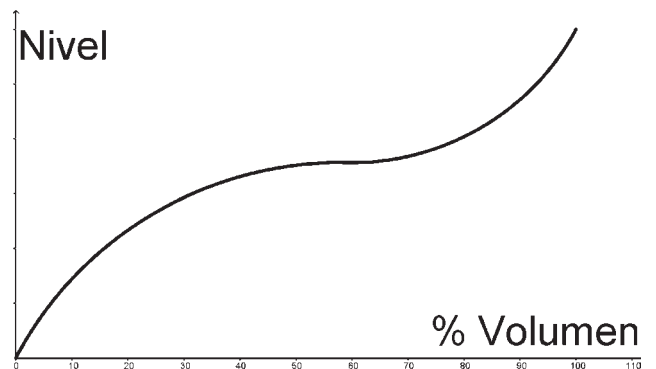
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

- ☞ Dos de ellas se corresponden con dos de los cuatro frascos. Identifícalas.
- ☞ Dibuja las gráficas correspondientes a los otros dos envases.
- ☞ Dibuja los envases que encajarían con un llenado como el de las dos gráficas restantes.

Actividades • En la cancha

Estimar la proporción

En algunas situaciones tenemos un conjunto muy grande de objetos (peces, tornillos, votantes...) y queremos estimar qué proporción de ellos cumple unas determinadas condiciones (peces exóticos, tornillos defectuosos, votantes del partido X ...). Como es difícil, costoso, o incluso imposible contar uno a uno todos los elementos, lo que se hace es coger un número pequeño de individuos (muestra) y emplear las herramientas que nos ofrece la Estadística.

Vamos a realizar un experimento sencillo con ayuda de las botellas y los cilindros que se colocan en sus extremos. Las botellas A y B están llenas con bolas blancas y negras. Las bolas blancas representan las piezas correctas y las negras las defectuosas que han producido respectivamente dos máquinas A y B . Queremos saber cuál de las dos es mejor sin tener que hacer un recuento exhaustivo. Para ello se agita la botella y volteándola se deposita en el cilindro una muestra de seis bolas. Repetimos este proceso cinco veces y apuntamos las bolas negras que salen en cada ocasión.

Botella A		Botella B	
Muestra	Bolas Negras	Muestra	Bolas Negras
1. ^a		1. ^a	
2. ^a		2. ^a	
3. ^a		3. ^a	
4. ^a		4. ^a	
5. ^a		5. ^a	
Total		Total	

- ☞ ¿Cómo decidirías cuál de las máquinas produce menos piezas defectuosas?
- ☞ ¿Crees que hay alguna relación entre la proporción de piezas defectuosas en una muestra y la proporción real que produce una máquina?
- ☞ ¿Se te ocurre alguna forma de estimar la proporción de piezas defectuosas que produce cada máquina?

Actividades • En la cancha

Estimar la población

Para calcular aproximadamente el número de peces que hay en un lago, la Estadística nos proporciona el siguiente método que vamos a realizar con una botella con bolas rojas (los peces) y 10 bolas negras (peces que previamente hemos pescado y devuelto al lago marcados). Queremos estimar cuántas bolas hay en la botella. Agitando la botella colocamos en el cilindro una muestra de seis bolas y apuntamos la proporción de negras. Repetimos este proceso cinco veces.

<i>Muestra</i>	<i>Número de Negras</i>	<i>Proporción</i>
1. ^a		
2. ^a		
3. ^a		
4. ^a		
5. ^a		
Total		

☞ Si suponemos que la proporción de peces marcados en la muestra es parecida a la del total de peces marcados en el lago, ¿cómo estimaremos el número de peces (bolas)?

Actividades • En la cancha

Número de taxis

Deseamos conocer aproximadamente el número de taxis que hay en una ciudad. Teniendo en cuenta que los taxis están numerados, para simular este problema lanzamos 5 veces un dado de 20 caras (en este caso suponemos que hay 20 vehículos, dato que en realidad es desconocido) y apuntamos los números que van saliendo.

<i>Tirada</i>	<i>Número del taxi</i>
1. ^a	
2. ^a	
3. ^a	
4. ^a	
5. ^a	
Media muestral	

Después calculamos la media de la muestra, sumando los datos y dividiendo entre el número de muestras. Si suponemos que ésta se aproxima a la media de todos los datos y sabiendo que se cumple:

$$\text{Número de taxis} = 2 \times \text{Media muestral} - 1$$

- ☞ Haz la estimación del número de taxis.
- ☞ ¿Ha sido buena o mala la predicción?

Actividades • En la cancha

Dilema del concursante

A los dos finalistas de un concurso se les plantea la siguiente prueba. El presentador le entrega a cada uno dos billetes de 500 euros y un sobre. Sin que puedan comunicarse entrarán en dos habitaciones e introducirán en el sobre uno o los dos billetes. Si los dos sobres tienen la misma cantidad de dinero, ése será el premio para cada concursante (500 o 1000 euros). Pero si en un sobre hay 500 y en el otro 1000 euros, el que ha metido la cantidad menor consigue un premio de 1500 euros y el otro recibe 5 euros.

👉 ¿Cuál sería tu decisión? ¿Está basada en la cooperación o en el egoísmo?

Actividades • En la cancha

Completar la colección

Una estrategia comercial para fomentar la venta de pastelitos era la de incluir en los mismos, cromos coleccionables. Nuestra colección consiste en 6 cromos con la imagen de 6 personajes aragoneses conocidos (deportistas y músicos). A cada personaje le corresponde un número del 1 al 6. Vamos a hacer una simulación para estimar cuánto tardamos en completar la colección. Para ello tira un dado y el número obtenido correspondería al del cromo. Tienes gomets y una fotocopia, con las imágenes de los cromos. La primera vez que te salga un número pon un gomets en la imagen correspondiente. Sigue tirando hasta que salgan los seis números... Ve contando cuantas veces necesitas tirar el dado hasta que completes la colección.

- ☞ ¿Cuántas tiradas has necesitado en cada intento? ¿Hay mucha diferencia en los resultados obtenidos? Compáralos con los de un compañero.
- ☞ Ahora ponte de acuerdo con un compañero y tenéis que conseguir de forma cooperativa una colección para cada uno. Tiráis los dados de forma consecutiva y cuando aparezca un número repetido para el que lo ha tirado pero que le falte al otro, generosamente aquél se lo pasa. Cuando uno completa la colección, de forma solidaria, continúa tirando. ¿Cuántas tiradas habéis necesitado cada uno? ¿Es beneficioso cooperar?

Un friso consiste en la repetición longitudinal de un motivo básico. Para construir el motivo básico, partimos de un elemento al que le podremos aplicar alguno de estos movimientos: simetría, giro, traslación y deslizamiento. Por ejemplo, si empezamos con el siguiente elemento básico:

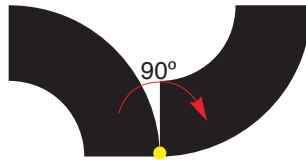


Podemos hacer

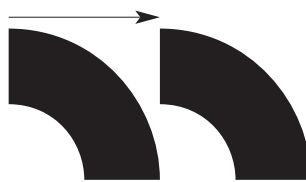
Simetría



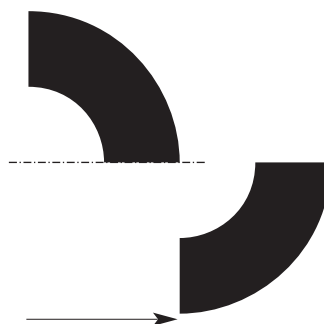
Giro



Traslación



Deslizamiento (simetría y luego traslación)

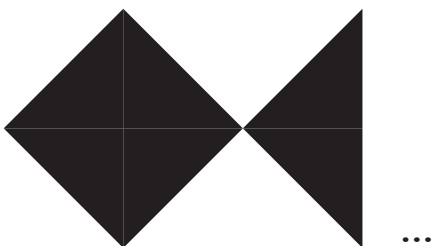


Actividades • En las paredes

Construye frisos

Dispones de un montón de piezas con un mismo diseño que le llamaremos baldosa aragonesa.

- ☞ Utiliza todas las que necesites para construir el inicio de los frisos que ves aquí debajo.
- ☞ Después, alárgalos a, por lo menos, el triple de su longitud.



En todas partes, ¡Matemáticas!

Actividades • En las paredes

Encontrando frisos

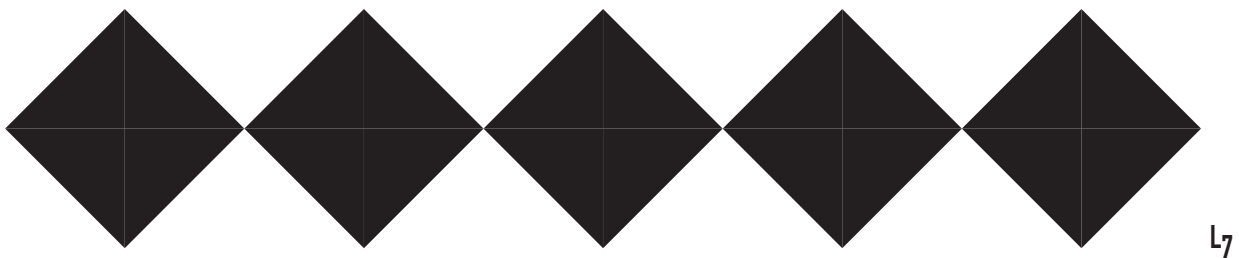
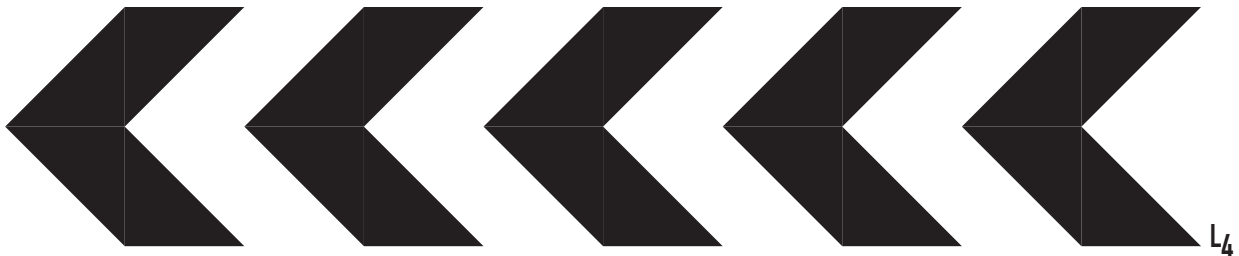
Dispones de un montón de piezas con un mismo diseño que le llamaremos baldosa aragonesa.

- ☞ **Construye todos los frisos distintos que sean posibles. Recuerda que para que, matemáticamente, dos frisos sean distintos, es necesario que el motivo básico esté generado a partir de movimientos diferentes. Como ayuda, te diremos que sólo hay siete posibles diseños.**

Actividades • En las paredes

Replicando frisos

Utilizando la denominada baldosa aragonesa, matemáticamente, solo tenemos estos siete frisos distintos (a la derecha puedes ver su nombre):



☞ Utiliza la baldosa compuesta por dos segmentos rectilíneos y haz los siete frisos distintos. Matemáticamente serán los mismos pero estéticamente se verán diferentes.



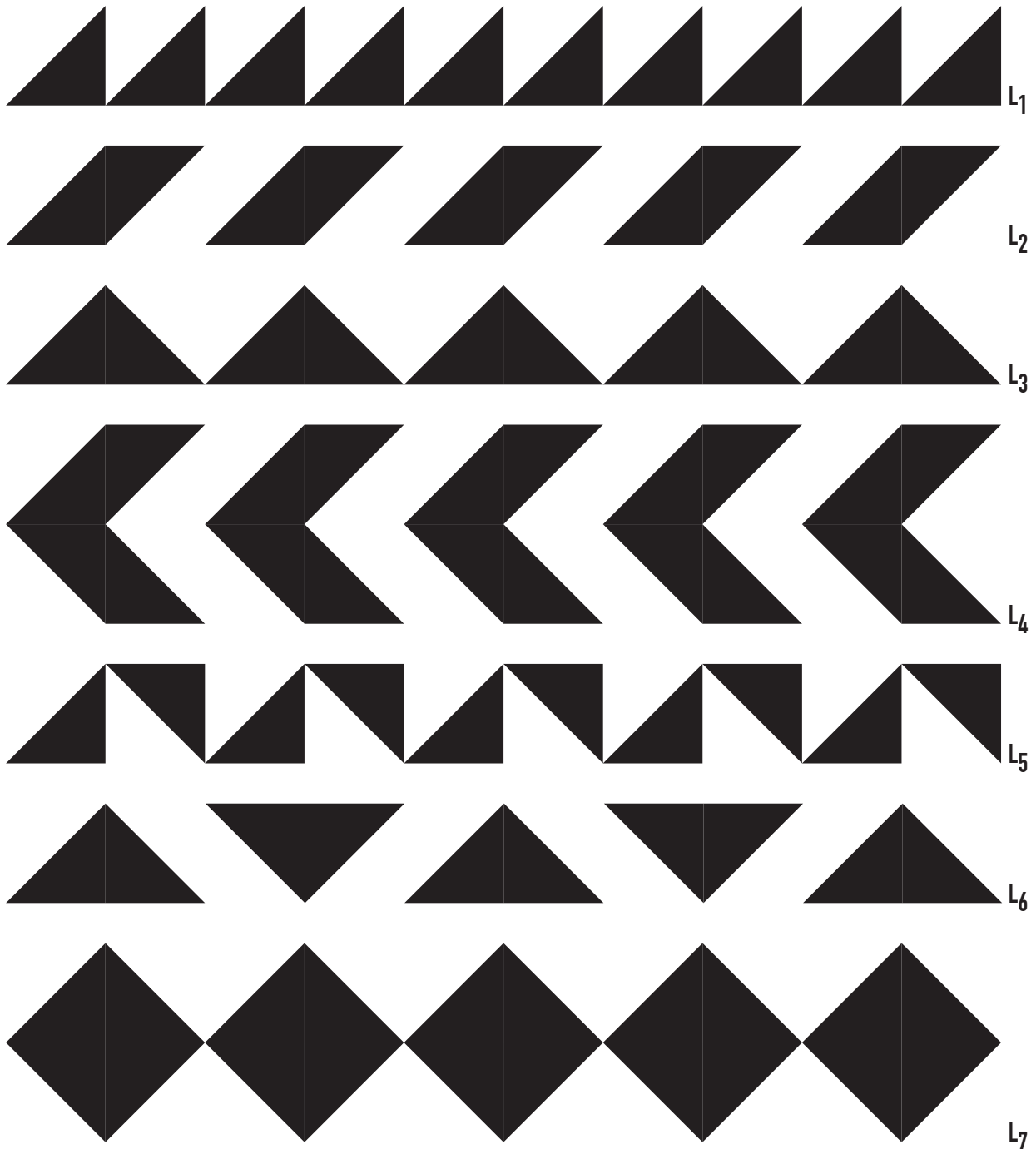
☞ En papel cuadriculado, invéntate una baldosa y, luego, con ella, crea algún friso.

En todas partes, ¡Matemáticas!

Actividades • En las paredes

Identificando frisos

Utilizando la denominada baldosa aragonesa, matemáticamente, solo tenemos estos siete frisos distintos (a la derecha puedes ver su nombre)



Todos estos diseños se encuentran en el arte mudéjar aragonés.

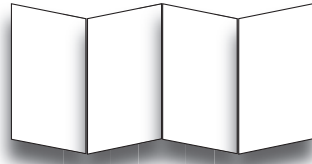
☞ Identifica los diferentes frisos (L_1, L_2, \dots, L_7), en las fotos que tienes a tu disposición.

En todas partes, ¡Matemáticas!

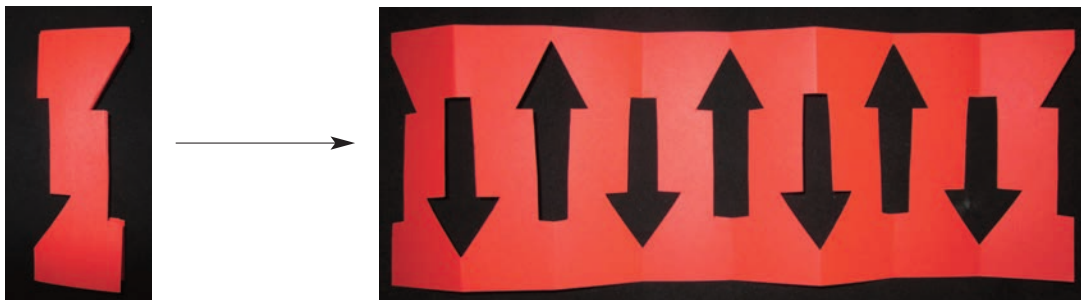
Actividades • En las paredes

Frisos de papel

Hay una sencilla forma de conseguir un friso con papel. Toma una tira de papel, dóblala por la mitad, y luego otra vez (te quedará como el dibujo). Si la tira es larga quizá puedas hacer otro pliegue más.



Con la tira plegada, dibuja un motivo y recorta. Cuando despliegues la tira, aparecerá un friso. Aquí tienes un ejemplo.



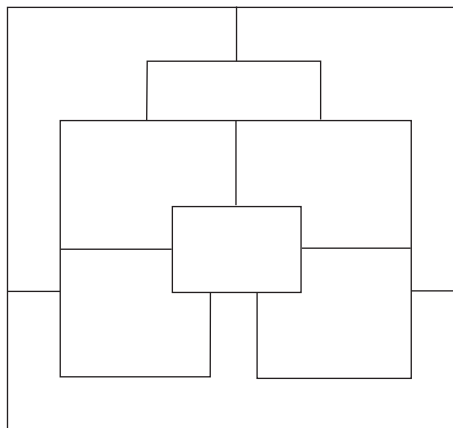
☞ Intenta conseguir el siguiente



☞ Ahora, invéntate tú uno.

Vamos a colorear un mapa, de tal forma que no haya dos regiones limítrofes con el mismo color. Numeramos las regiones del mapa: 1, 2, 3,... Elegimos un color, por ejemplo el rojo. Recorremos las regiones en orden ascendente y las pintamos de rojo si no hay una adyacente que ya tenga ese color. Escogemos otro color, por ejemplo, el verde. De nuevo recorremos las regiones sin pintar en orden ascendente y las pintamos de verde si no tienen vecinos de ese color. Repetimos el proceso de elegir color y recorrer las regiones hasta que todas estén pintadas.

☞ Aplicar el método anterior al siguiente mapa. ¿Cuántos colores has necesitado? ¿Puedes reducir ese número pensando por tu cuenta?



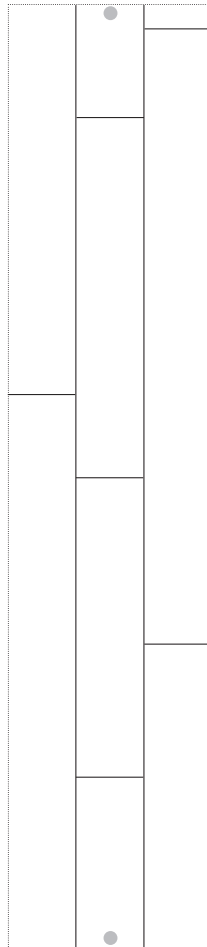
☞ Diseña un mapa con un máximo de 10 regiones para que tu compañero lo intente pintar con el menor número posible de colores. ¡No se lo pongas muy fácil!

Actividades • En los mapas

Sobre la cinta de Moebius

Tienes dibujada en las dos caras de la lámina una banda con varias regiones delimitadas por líneas rectas.

- ➡ Primero recorta la banda y pega los extremos, retorciendo el papel de manera que los círculos grises coincidan.
- ➡ Ahora tienes que pintar cada zona sin que dos limítrofes tengan el mismo color, intentando utilizar el menor número de colores. ¿Cuántos has necesitado? [Ten en cuenta que en la banda de Moebius cuando se dice zona hace referencia al mismo trozo por las dos caras del papel.]



Uno de los modelos de balón es un poliedro que está formado por pentágonos y hexágonos. Concretamente se trata de un icosaedro truncado.

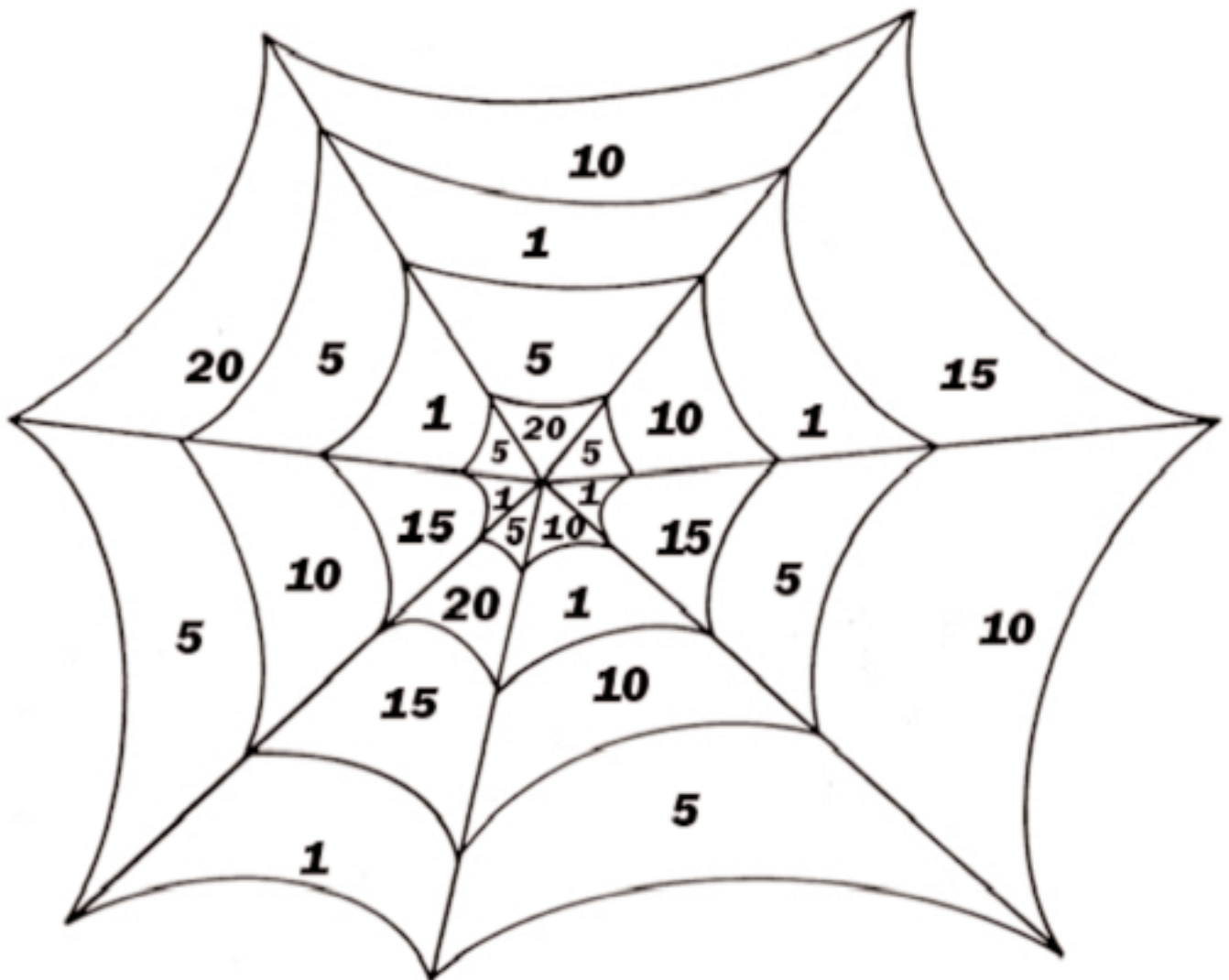
☞ Dispones de un balón blanco y unos cuantos pentágonos y hexágonos de colores. Con ellos debes de ir recubriendo el balón con la condición de que no haya dos polígonos del mismo color que compartan frontera. ¿Es posible? ¿Podrías hacerlo con menos colores de los que se proponen?

Actividades • En los mapas

Juego de la araña

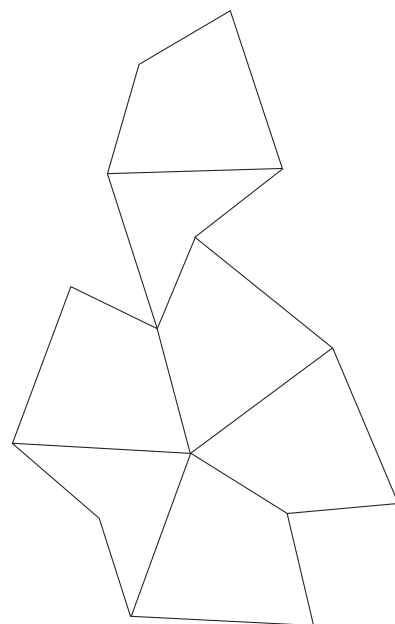
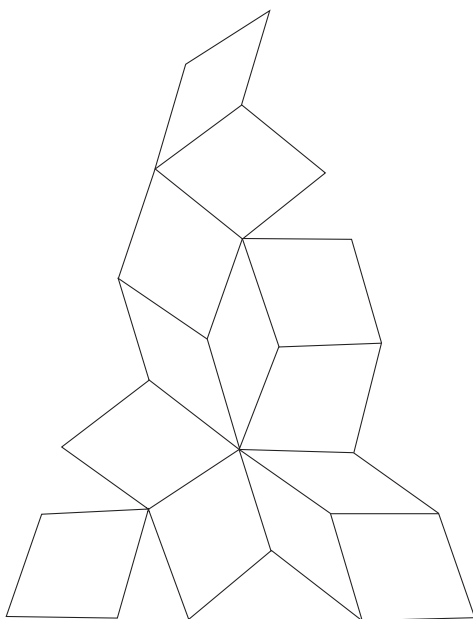
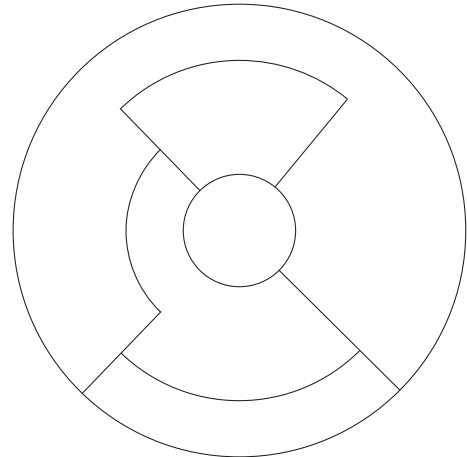
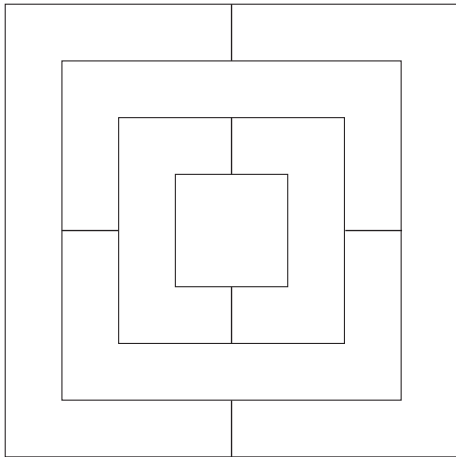
Este juego es para dos personas. Necesitamos el dibujo de la tela de araña, un dado y cuatro lápices o rotuladores de colores.

Cada jugador, en su turno, tira el dado. El jugador que inicia el juego, pinta tantas zonas como le haya salido al tirar el dado, con uno o dos colores distintos (si son dos estas deberán ser limítrofes). En las tiradas sucesivas, cada jugador elige un color y pinta tantas zonas de la telaraña como le haya salido en el dado, con la condición de que ha de tener zona fronteriza con alguno ya pintado y no puede haber dos trozos fronterizos con el mismo color. Cada jugador anota los puntos que ha conseguido (cada zona tiene un valor). El juego termina cuando se hayan coloreado todas las zonas o se llegue a una situación en la que no se pueda cumplir la exigencia del juego. Gana aquel que haya conseguido más puntos en total.



En todas partes, ¡Matemáticas!

☞ Pinta las siguientes figuras con el menor número de colores posible sin que haya dos zonas vecinas con el mismo color.



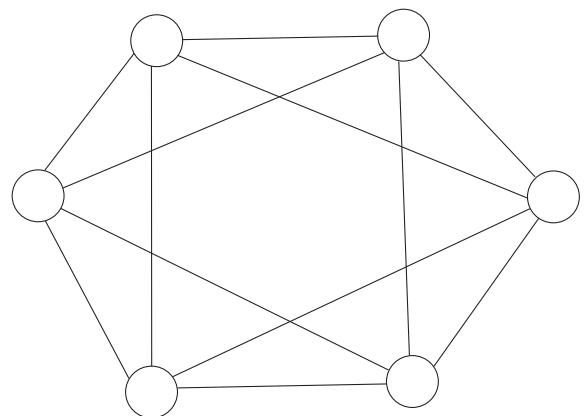
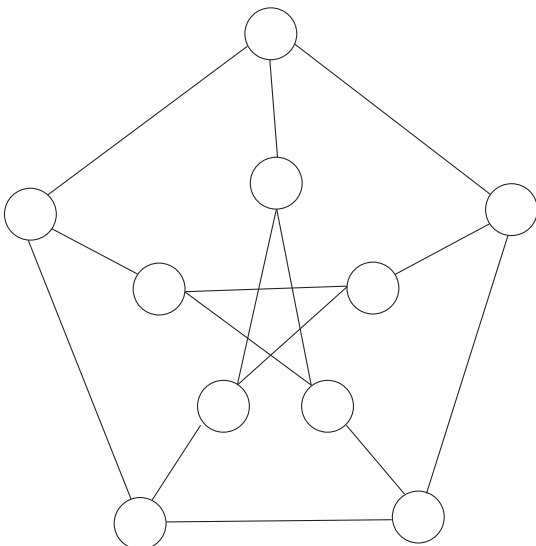
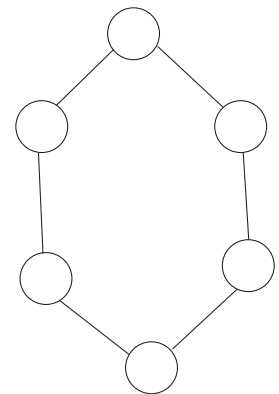
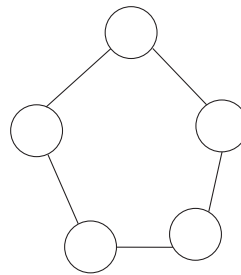
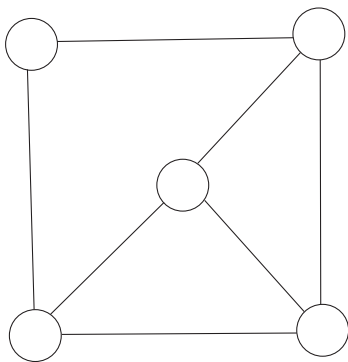
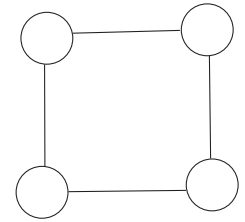
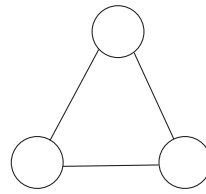
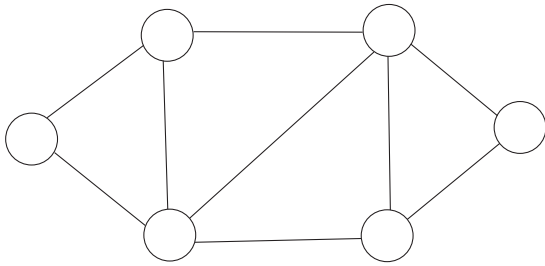
Actividades • En los mapas

Número cromático

☞ Pinta los vértices de los grafos de manera que si dos están conectados tengan colores distintos.

El mínimo número de colores para conseguir este resultado se llama *número cromático del grafo*.

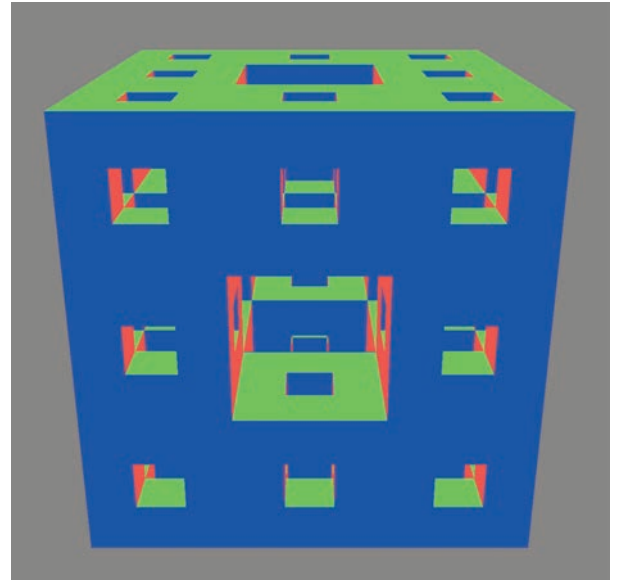
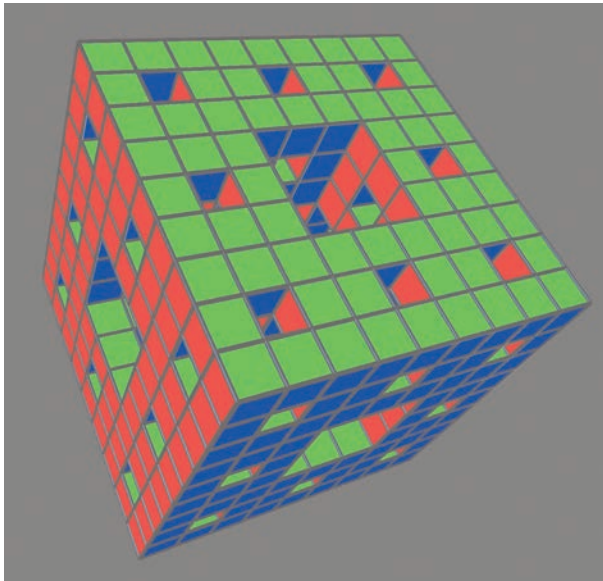
☞ Calcula el número cromático de cada uno.



Actividades • En los videojuegos

Esponja de Menger

Las dos figuras que ves son dos vistas distintas de un mismo objeto fractal: es el segundo paso de la llamada *Esponja de Menger*.



Como cualquier fractal su construcción se basa en aplicar un mismo proceso al mismo tipo de figura geométrica, pero de diferentes tamaños. En este caso lo que se hace es:

1. Empezamos con un cubo.
2. Dividimos cada cara del cubo en 9 cuadrados. Esto subdivide el cubo en 27 cubos más pequeños.
3. Eliminamos los cubos centrales de cada cara y el cubo central.

La estructura que nos queda es la *primera iteración* y está formada por cubos más pequeños que el inicial. A estos nuevos cubos les tenemos que volver a aplicar los puntos 1, 2 y 3, para obtener la segunda iteración, que es lo que ves en las imágenes de arriba. Ahora hay que hacer lo mismo en cada uno de los cubos que forman esa estructura, para obtener la tercera iteración. Y así sucesivamente.

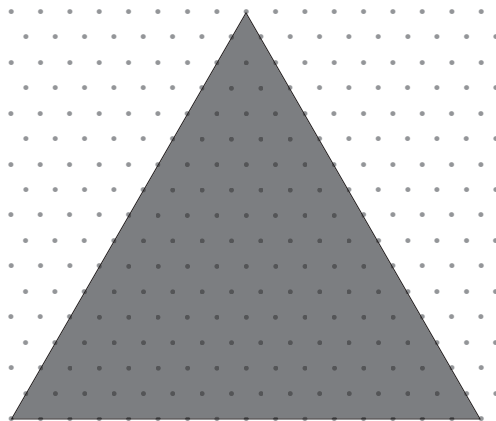
- ☞ Construye la primera iteración con los policubos que tienes a tu disposición.
- ☞ ¿Cuál es la relación entre la arista de estos policubos y el cubo grande inicial? ¿Y la relación entre los volúmenes?
- ☞ En la segunda iteración, la que se ve en las imágenes de esta hoja, ¿qué porcentaje del volumen del cubo queda después de haberlo agujereado?

En todas partes, ¡Matemáticas!

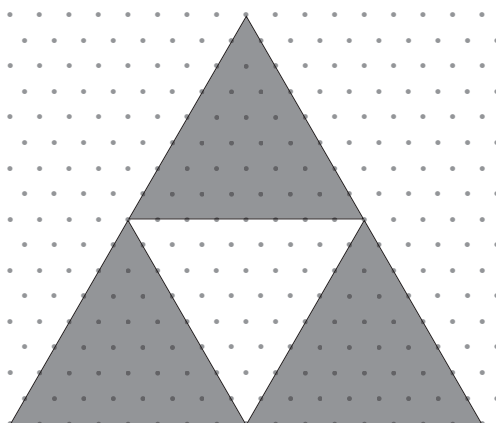
Actividades • En los videojuegos

Triángulo de Sierpinski

Vamos a hacer algunas iteraciones de una figura fractal que se llama *triángulo de Sierpinski*. Podrás seguir el proceso en la fotocopia que tienes. En ella, lo primero que aparece es un triángulo equilátero de 16 unidades de lado, que es nuestro punto de partida.

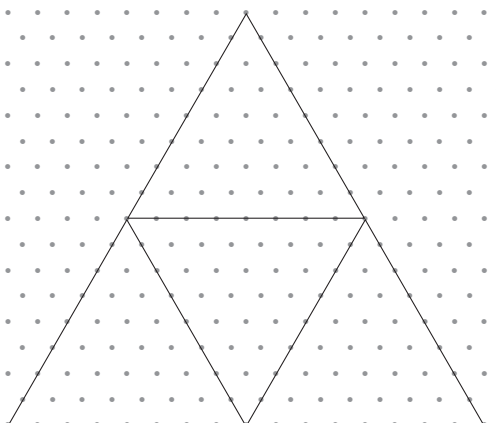


En la primera iteración, marcamos los puntos medios de los lados, trazamos un triángulo y lo quitamos. Este es el resultado:



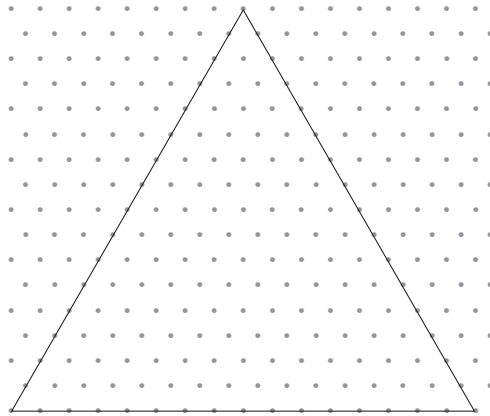
Como ves, te quedan tres triángulos de lado la mitad del primero. Para la segunda iteración, hay que aplicarle a estos tres triángulos el mismo proceso que se le ha aplicado al primero.

☞ Partiendo del esquema de la primera iteración, haz la segunda. El esquema es este:



En todas partes, ¡Matemáticas!

La siguiente figura de la fotocopia es el esquema del triángulo inicial.



☞ Utilízalo para hacer la tercera iteración.

☞ Cuenta el número de triángulos que has obtenido en cada iteración:

<i>Paso</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5...</i>	<i>n</i>
<i>Triángulos</i>	3					

☞ ¿Puedes predecir como continuaría la tabla para 5, 6,...?

☞ Generaliza y encuentra una fórmula para n . Si n aumentara indefinidamente, ¿qué ocurriría con el número de triángulos?

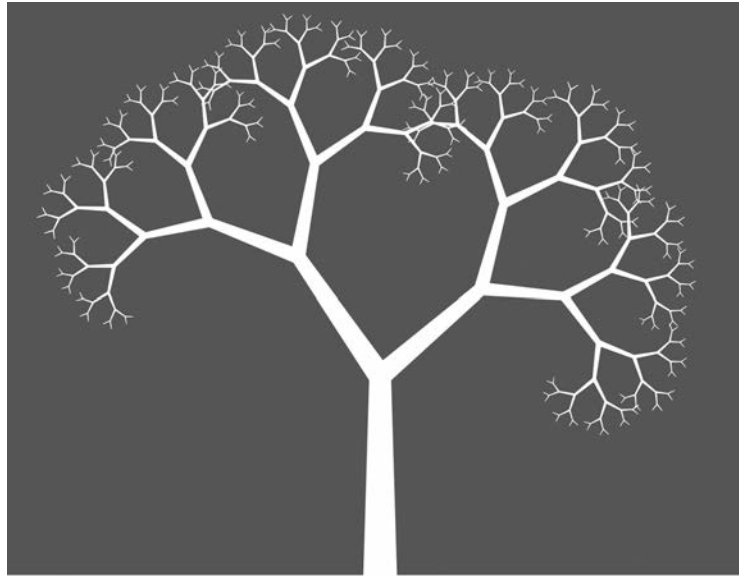
☞ Vamos a tomar como unidad el área del triángulo completo, antes de quitarle ningún trozo. Piensa cuál sería el área de la parte sombreada en cada uno de los pasos (escríbelo en forma de fracción)

<i>Paso</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5...</i>	<i>n</i>
<i>Área</i>						

☞ ¿Puedes predecir como continuaría la tabla para 5, 6,...?

☞ Generaliza y encuentra una fórmula para n . Si n aumentara indefinidamente, ¿qué ocurriría con el área sombreada?

Observa el siguiente árbol:



Se ha generado repitiendo un motivo de un tronco y dos ramas que cambian de posición y tamaño.

El motivo es este:

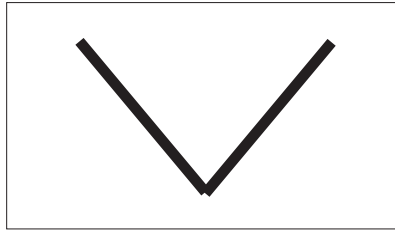


👉 Busca y pinta con distintos colores el motivo en varios tamaños y posiciones.

Actividades • En los videojuegos

Árbol fractal colectivo

Tienes a tu disposición una pegatina con dos ramas de un árbol fractal que vas a construir en colaboración con el resto de tus compañeros de tu centro.



☞ Se trata de que vayáis a la pared en la que se está construyendo el árbol, busques el final de una rama que te guste y pegues, a continuación, las tuyas. Piensa un poco antes de hacerlo. El objetivo es hacer un árbol con el mayor número de ramas posible, así que pega tus ramas intentando dejar bastante espacio para el resto de tus compañeros.

Entre los materiales de este cartel, puedes ver un cilindro de cartón que lleva una cinta atada a un extremo. En la cinta puedes observar un montón de letras sin sentido. Tienes que enrollar de manera adecuada la cinta, hasta llegar al otro extremo del cilindro, de tal forma que cuando termines se pueda leer un mensaje. Este método ya se utilizaba hace 2500 años. El emisor y el receptor del mensaje poseían un cilindro de las mismas dimensiones para que pudiese ser leído correctamente.

- ✎ Corta una tira de papel como si fuera la cinta del apartado anterior. Ahora utiliza el otro cilindro de cartón que tienes para codificar un mensaje. Una vez escrito, dale la tira de papel a tu compañero para que lo descifre. Después intercambiad los papeles.

Actividades • En tu móvil

Mensaje con letras emparejadas

Una forma sencilla de codificar es poner las letras por parejas. Para codificar el mensaje cambia cada letra por su pareja. Para descodificarlo, lo mismo. Utilizando los siguientes emparejamientos (como en castellano hay 27 letras, la *w* la emparejamos consigo misma):

A	O	C	E	G	N	Q	M	I	P	K	L	S	W
R	B	X	J	Z	U	F	T	H	V	D	Y	Ñ	W

👉 Descubre qué dice el siguiente mensaje oculto:

XBUJCHBU TRMJTRMHR

👉 Utiliza las tarjetas que tienes para escribir un mensaje codificado. Primero, pon el texto normal, es decir que se pueda leer sin problemas. Esto no lo tiene que ver tu compañero. A continuación, dale vuelta a todas las tarjetas y se verá un mensaje incomprensible. Tu compañero tiene que descodificar el mensaje utilizando los emparejamientos del ejercicio anterior. ¡No puede darle la vuelta a las tarjetas! Cuando acabéis, volverlo a hacer, pero cada uno cambia de papel.

Desde tiempos de los romanos se usa una manera de cifrar mensajes que consiste en cambiar cada letra por la que ocupa la tercera posición después de ella en el alfabeto. Por ejemplo la A (posición 1) la cambiamos por la D (posición 4), la B (posición 2) por la E (posición 5) y así sucesivamente hasta la Z (última posición) por la C (posición 3).

☞ ¿Quién utilizaba este método? La respuesta tendrás que descifrarla:

MXÑLR FHVDU

☞ Escribe un mensaje y pásaselo a tu compañero para que lo descodifique.

También podéis inventaros nuevas claves para sustituir una letra por otra: por ejemplo, cambiar por una letra que ocupe cinco posiciones después o dos antes, etc.

Actividades • En tu móvil

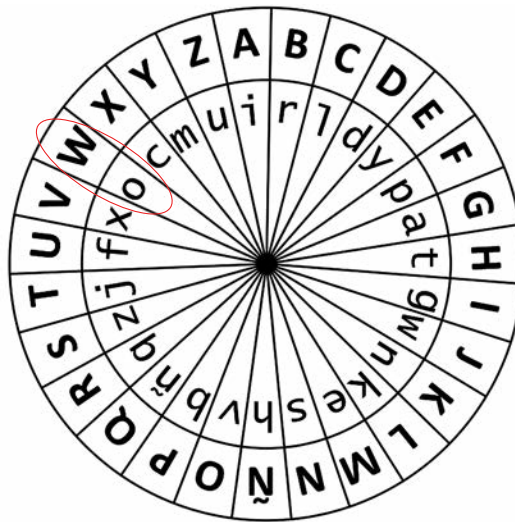
Mensajes concéntricos

Para facilitar la creación de los mensajes, se idearon aparatos como el de círculos concéntricos que encontrarás entre el material del cartel. Consiste en dos círculos de dos tamaños unidos por el centro y de manera que el superior, más pequeño, puede girar sobre el inferior. En cada uno están escritas las letras del alfabeto, no necesariamente ordenadas. Tanto el emisor como el receptor han de disponer de los mismos círculos y para poder cifrar y descifrar un mensaje, los dos han de conocer la clave.

La clave se forma con dos letras, una del círculo interior y otra del superior. Haciéndolas coincidir, basta con sustituir cada letra del mensaje a encriptar leído sobre el círculo grande, con su correspondiente letra del círculo menor.

☞ Si la clave es Wo, ¿qué mensaje se oculta entre estas letras?

qfydiz lvslysjqgliz



☞ Elige una clave (tienes muchas posibilidades) y dísela a tu compañero. Luego pásale un mensaje encriptado y él tendrá que averiguarlo.

La utilización de tablas en las que organizar letras, números y símbolos, permite establecer claves, que tanto el emisor como el receptor conocen, para ocultar mensajes.

	1	2	3	4	5	6	7
1	A	E	I	M	P	T	X
2	B	F	J	N	Q	U	Y
3	C	G	K	Ñ	R	V	Z
4	D	H	L	O	S	W	.

Cada letra del mensaje se sustituye por los dos números que indican la posición en la tabla: la letra E se sustituirá por 12 y la letra C por 31, etc.

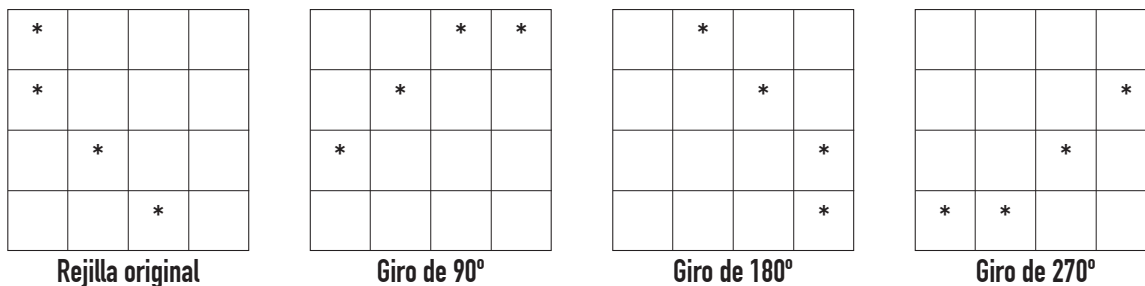
☞ ¿Qué mensaje ocultan estos números?

451232263544 252612 4344 1141133613241145

Te puede resultar sencillo, pero piensa que si solo encontraras el mensaje y no supieras de donde provienen los números, te resultaría muy difícil llegar a descifrarlo.

☞ Escribe un mensaje y que un compañero intente averiguar lo que le dices en él. Ten en cuenta que has de mantener siempre el mismo orden al escribir los números (número de fila y número de columna en el que se encuentra la letra que vas a encriptar).

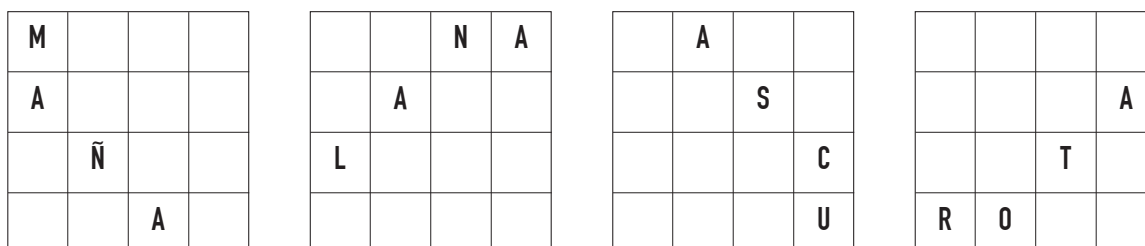
Este método de codificar mensajes lo utilizó Julio Verne en su novela *Matias Sandorff* y consiste en lo siguiente. Como ves, la rejilla es 4×4 , es decir tiene 16 celdas, y de ellas, 4 están señaladas. Pero lo están de tal manera que cuando vayas girando la rejilla, esas marcas hayan cubierto todas las celdas. Fíjate en esta imagen que lo va a ilustrar:



Vamos a enviar un mensaje de 16 letras, por ejemplo:

MAÑANA A LAS CUATRO

El que envía el mensaje tendrá que encriptarlo siguiendo el esquema anterior, colocando por filas las letras, sobre las marcas, en cada una de las rejillas:



Y al solapar todas las rejillas en una sola nos quedará el mensaje oculto:

M	A	N	A
A	A	S	A
L	Ñ	T	C
R	O	A	U

Si se escribe una fila a continuación de otra, el mensaje quedará:

MANAAASALÑTCROAU

O si en lugar de las filas son las columnas:

MALRAAÑONSTAAACU

Para descifrarlo, quien recibe el mensaje deberá realizar la operación contraria: colocar las letras en una tabla 4×4 e ir solapando una rejilla idéntica en las cuatro posiciones (siempre girando 90° a la derecha) y anotar, por orden, las letras que van apareciendo en los agujeros.

Si quieres escribir un mensaje más largo, solo tienes que hacer bloques de 16 letras y repetir el proceso, o utilizar rejillas de mayor tamaño.

- ☞ Investiga diferentes configuraciones de rejillas 4×4 . ¿Se pueden colocar los agujeros de cualquier manera o hay ciertas situaciones que no sirven? Explícalo.
- ☞ Con las rejillas que tienes a tu disposición, elige una configuración y encripta un mensaje. Propón a un compañero que lo descifre. Luego intercambiáis los papeles.
- ☞ ¿Se pueden utilizar rejillas de 5×5 ? ¿Y de 6×6 ? ¿Puedes generalizar?

Actividades • En tus zapatillas

Lazos pajarita



La figura izquierda de la ilustración muestra el enlazado más corto que podemos realizar. Tiene el gran inconveniente de que la zapatilla queda casi suelta. Para que eso no ocurra vamos a exigir que el cordón no atraviese consecutivamente tres agujeros del mismo lado (como ves que sí ocurre en la zapatilla de la izquierda). Con esa condición los enlazados más cortos se obtienen combinando los elementos (a), (b) y (c) de manera que haya el mayor número posible de tramos del tipo (c). Estos enlazados se llaman *lazos pajarita* (tienes un ejemplo en la figura derecha).

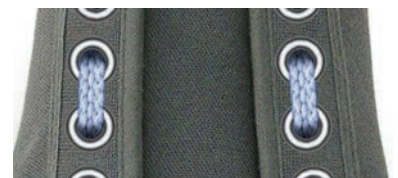
- ☞ Dibuja los lazos pajarita para 4, 5 y 6 parejas de agujeros y hazlo en las zapatillas que se te facilitan.
- ☞ Mide la longitud de los enlazados determinando la distancia entre dos agujeros horizontales de la misma altura y entre dos verticales.



(a)



(b)



(c)

En todas partes, ¡Matemáticas!

Actividades • En tus zapatillas

Midiendo la longitud

👉 Mide la longitud de los cordones teniendo en cuenta que la distancia entre dos agujeros horizontales que se encuentran a la misma altura es H : 2,5 cm y entre dos verticales consecutivos es V : 1,6 cm.

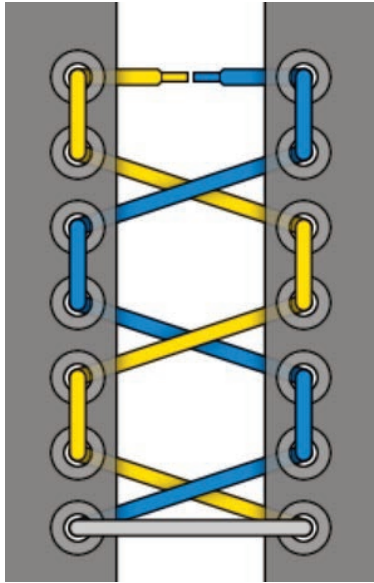


Figura 1

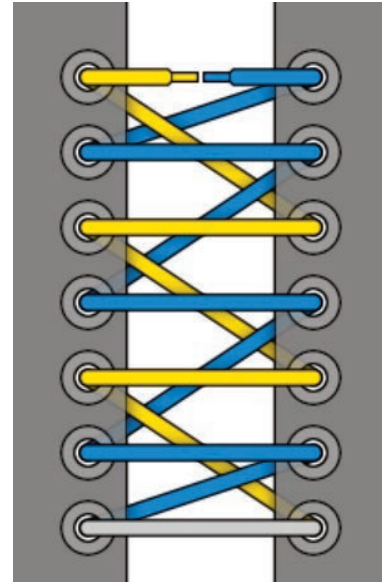


Figura 2

Actividades • En tus zapatillas

Cálculos en zig-zag

La fórmula de los enlazados que se pueden realizar en una bota con $2n$ agujeros y que siempre vayan de un lado a otro (en zig-zag) sigue la fórmula

$$\frac{n!(n-1)!}{2}$$

☞ Con ayuda de una calculadora realiza una tabla en la que aparezca en una columna el número de agujeros y en la contigua el número de enlazados en zig-zag.

<i>Parejas de agujeros</i>	<i>Número de enlazados</i>
4	
5	
6	
8	
10	

☞ ¿Hay una relación de proporcionalidad entre las magnitudes?

☞ Las botas de los dioses tienen 100 pares de agujeros. Con ayuda de los logaritmos determina cuántos dígitos tiene el número de enlazados en zig-zag que se pueden realizar en este divino calzado.

Actividades • En tus zapatillas

Describe el enlazado

☞ Realiza en tus zapatillas alguno de los siguientes enlazados.



Figura 1



Figura 2

- ☞ Explica a tu compañero cómo hay que hacer uno de los entrelazados para que lo pueda reproducir en su zapatilla.
- ☞ Calcula la diferencia de lo que sobra de cordón en cada una de las zapatillas. Para ello sácalos, pero tienes que pensar cómo hacerlo para que cuando tengas los dos cordones en la mano, seas capaz de comparar lo que ha sobrado en uno y otro.

Actividades • En tus zapatillas

El nudo de la abuela

El *nudo* de la izquierda se llama *de la abuela* (queda vertical, inclinado) y el de la derecha *nudo cuadrado* (queda horizontal). Casi todo el mundo emplea uno de estos dos. ¿Cuál es el tuyo?

☞ Practica con un compañero ambos nudos.

El nudo de la abuela tiene la desventaja de que se suelta más fácilmente que el cuadrado.

☞ ¿Dónde está la diferencia en el proceso para conseguir uno u otro?

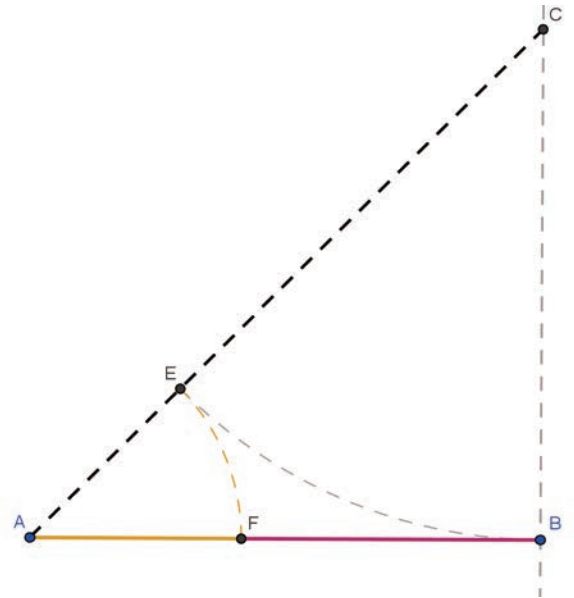


En todas partes, ¡Matemáticas!

Para comprobar si los lados de un rectángulo están en proporción raíz de dos, vamos a construir una herramienta: un compás.

Para ello necesitarás dos tiras de cartón iguales, terminadas en punta. En primer lugar, dibuja en una hoja un segmento AB que mida exactamente la longitud de las tiras. Sobre ese segmento sigue los siguientes pasos:

1. Traza una perpendicular BC de la misma longitud que AB
2. Une A con C y encuentra el punto E de manera que EC mida lo mismo que BC (pinchando el compás en C , traza el arco que pasa por B para encontrar el punto E)
- 3.- Traslada la distancia AE sobre el segmento AB . Para ello, pincha el compás en A , ábrelo hasta el punto E y traza el arco, que cortará al segmento AB en el punto F . Ese es el punto buscado. La relación entre BF y AF es raíz de dos.
4. Marca ahora en las tiras de cartón ese punto F .
5. Atraviesa las dos tiras con un encuadernador. Ya tienes hecho el compás.



¿Cómo usarlo?

Sobre un rectángulo, abre el compás y encaja el lado largo del rectángulo entre los brazos largos del compás. Manteniendo fija la abertura, intenta encajar el lado corto del rectángulo entre los brazos cortos del compás. Si encaja perfectamente, los lados del rectángulo estarán en proporción raíz de dos.

- ☞ Construye un compás y comprueba su funcionamiento con un A4 o un A5.
- ☞ Comprueba que la división entre BF y AF es raíz de dos. Para ello puedes suponer que AF mide 1 y BF mide x . En consecuencia, se trata de comprobar que el valor de x es raíz de dos.

¿Cuántas veces se puede doblar un folio?

Coge una hoja de papel grande y dóblala por la mitad. A continuación vuelve a doblar por la mitad y repite el proceso todas las veces que puedas.

☞ ¿Cuántas veces lo has podido hacer?

Llegará un momento en el que no podrás continuar porque el grosor alcanzado te lo impide. Quizá en el sexto o séptimo doblez.

☞ ¿Has podido conseguir el octavo?

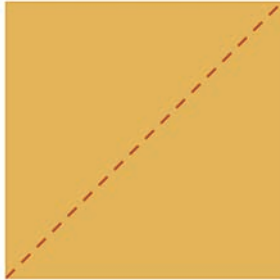
☞ ¿Podrías calcular el grosor de papel que has conseguido realizando el proceso anterior? (Si necesitas saber el grosor de una hoja, puedes medir el de un paquete de 100 hojas y de ahí obtendrás el de una hoja)

Sin embargo se puede conseguir un mayor número de pliegues. En 2002, una alumna de un instituto de EEUU, Britney Gallivan, encontró la manera de calcular el número de veces que puede doblarse cualquier papel. Ella consiguió realizar doce pliegues con un papel. En la actualidad el record está en 13 pliegues y para poder realizarlo se utilizaron 16 km de papel higiénico.

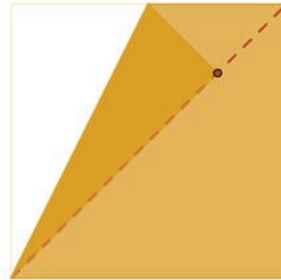
Partiendo de un cuadrado de papel, vamos a construir un rectángulo en la proporción raíz de dos. Es decir, un rectángulo semejante a un A4.

➔ Para ello sigue estos tres pasos:

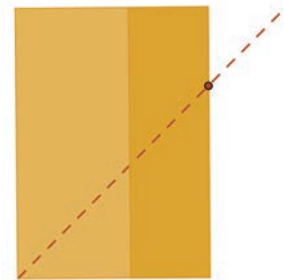
Marca la diagonal



Dobla y marca el punto



Desdobra y vuelve a doblar por el punto

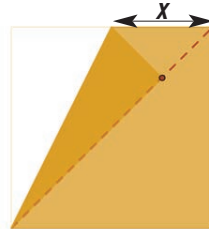


¿Cómo podemos comprobar que el rectángulo tiene la proporción buscada?

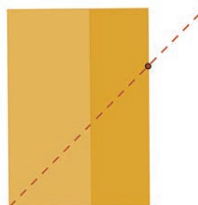
➔ **Método 1.** Toma un A4 y coloca los dos rectángulos (el A4 y el que has obtenido) haciendo coincidir un vértice y dos lados. Traza la diagonal que parte de ese vértice. Si pasa por los vértices correspondientes de los dos rectángulos, entonces el que has construido tendrá la proporción buscada. ¿Por qué?

➔ **Método 2.** Supón que el lado del cuadrado mide 1, y por tanto puedes calcular el valor de la diagonal.

Calcula en primer lugar el valor de x



Con lo que podrás hallar el lado corto del rectángulo.



➔ Por último comprueba que la relación entre el lado del cuadrado (recuerda que vale 1) y el lado que acabas de calcular es raíz de dos.

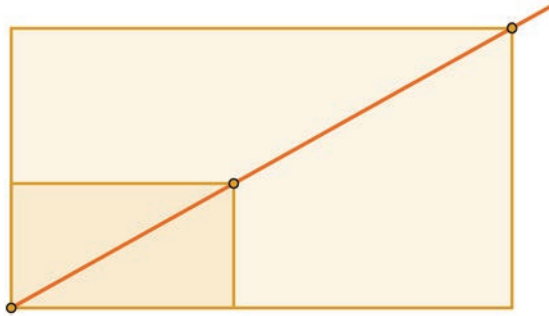
Actividades • En un folio

Comprobando la proporción

Para comprobar si un rectángulo tiene sus lados en la proporción raíz de dos, se pueden seguir estos dos procedimientos:

Método 1. Coloca el rectángulo sobre un A4 (o al revés, si es más grande), como se indica en el dibujo. La diagonal de los dos rectángulos ha de ser la misma.

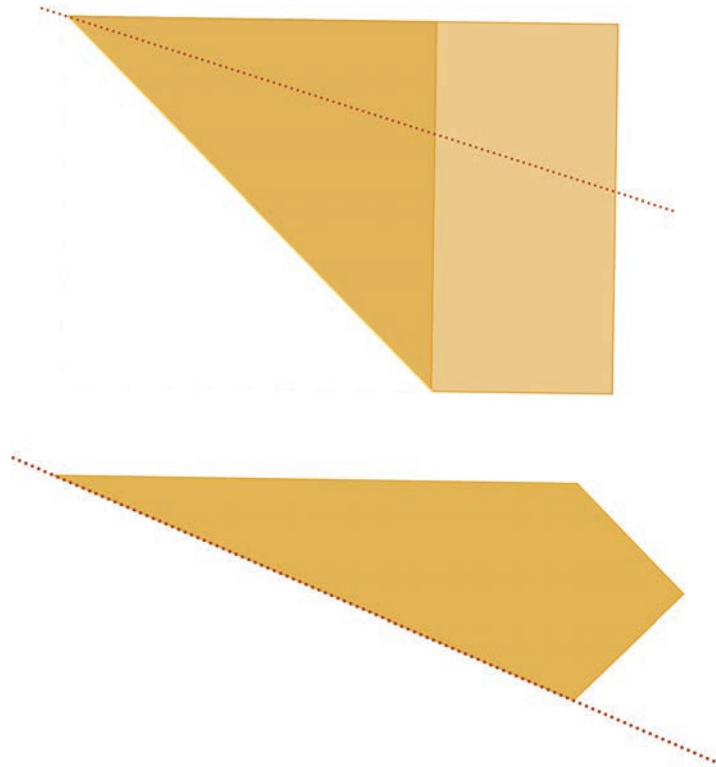
☞ Toma un A4 y pártelo por la mitad del lado largo. Comprueba que el rectángulo obtenido tiene esa proporción. ¿En qué resultado se basa esta propiedad?



Método 2. Dobra el papel por un vértice y haz coincidir los dos lados. Repite el paso anterior. Si consigues el cuadrilátero de la segunda figura, el rectángulo original tendrá la proporción raíz de dos.

☞ Compruébalo con un A4, y prueba con otros rectángulos.

☞ Explica por qué es cierto este método.

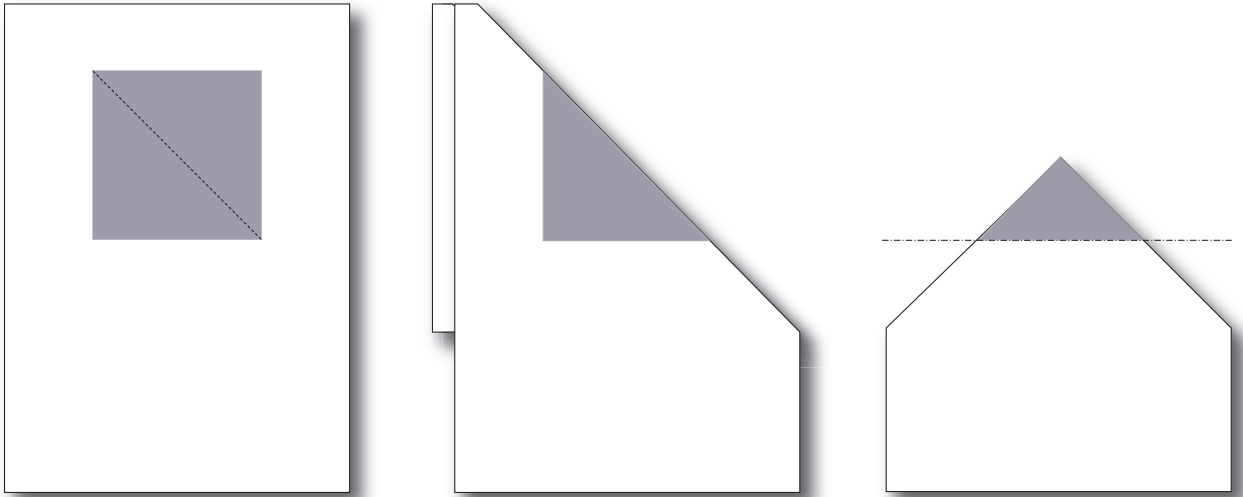


Actividades • En un folio

Un solo corte es suficiente

☞ Dibuja un cuadrado en una hoja de papel. ¿Puedes conseguir recortarlo dando un solo corte recto con una tijera?

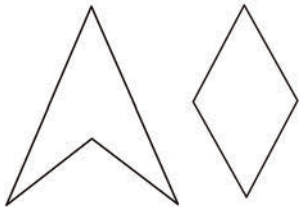
Una posible solución viene explicada en los siguientes dibujos. Como ves solo es necesario un corte, el último, y al desplegar la hoja de papel comprobarás que se ha recortado todo el cuadrado inicial. En este caso solo se han necesitado dos dobleces sobre los ejes de simetría de la figura



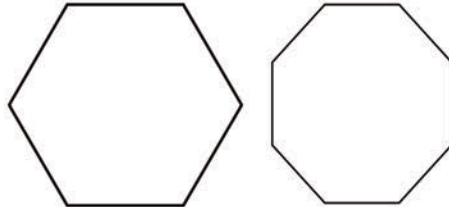
☞ ¿Puedes encontrar otra manera?

☞ ¿Te atreves con otras figuras?

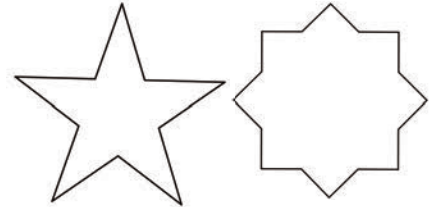
Con dos pliegues



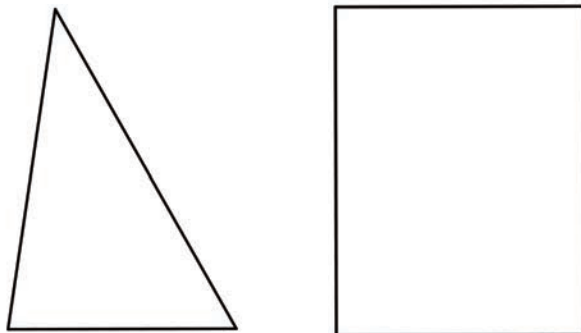
Con tres pliegues



Con cuatro pliegues



En otras ocasiones los pliegues son un poco más difíciles. Aquí tienes algunas figuras para que lo intentes:



En todas partes, ¡Matemáticas!

Actividades • En un folio

La caja más grande

Esta actividad consiste en intentar construir el recipiente de mayor volumen que sea posible partiendo de una hoja de papel, de un folio. En este caso no vamos a tener en cuenta las bases, es decir que solo necesitas construir la cara lateral.

A la hora de ir formando distintos modelos se puede formar el perímetro de la base sobre el lado mayor del folio o sobre el lado menor.

☞ En unas tablas como las que ves aquí, anota los valores de los distintos cuerpos que estás construyendo:

La base sobre el lado mayor

<i>Cuerpo</i>	<i>Lado de la base o radio</i>	<i>Altura</i>	<i>Volumen</i>
Prisma triangular			
Prisma cuadrado			
Prisma rectangular			
Prisma hexagonal			
Cilindro			
...			

La base sobre el lado menor

<i>Cuerpo</i>	<i>Lado de la base o radio</i>	<i>Altura</i>	<i>Volumen</i>
Prisma triangular			
Prisma cuadrado			
Prisma rectangular			
Prisma hexagonal			
Cilindro			
...			

☞ Contesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el cuerpo que encierra más volumen?
- ¿Es mejor formar la base sobre el lado largo o el corto?
- ¿En qué porcentaje aumenta el volumen del mismo cuerpo si se forma la base sobre un lado o sobre otro?
- Habrás observado que con un A4 se puede formar un recipiente con una capacidad casi de litro y medio. Si partimos de un A3, ¿el mismo modelo de recipiente llegará a tener una capacidad de tres litros?

En todas partes, ¡Matemáticas!

Actividades • En una pelota

Pelotas de playa

Una de las maneras de apilar esferas es construyendo una pirámide. Con nuestras pelotas de playa hemos formado la pila que aparece en la figura 1. Como puedes observar cada una de las capas forma un triángulo.

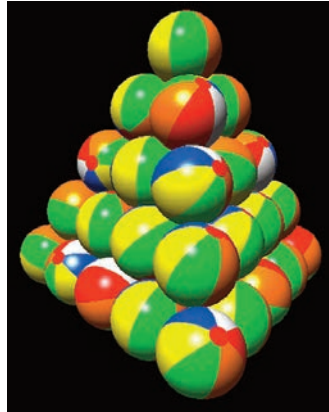


Figura 1

☞ ¿Cuántas pelotas necesitarías añadir para formar la siguiente capa?

En la figura 2 se han apilado las pelotas de manera que cada capa es un cuadrado.

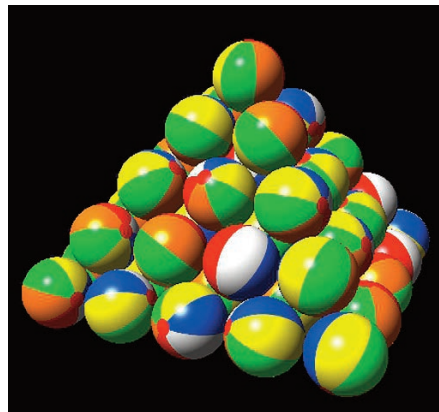


Figura 2

☞ ¿Cuántas pelotas necesitarías añadir para formar la siguiente capa?

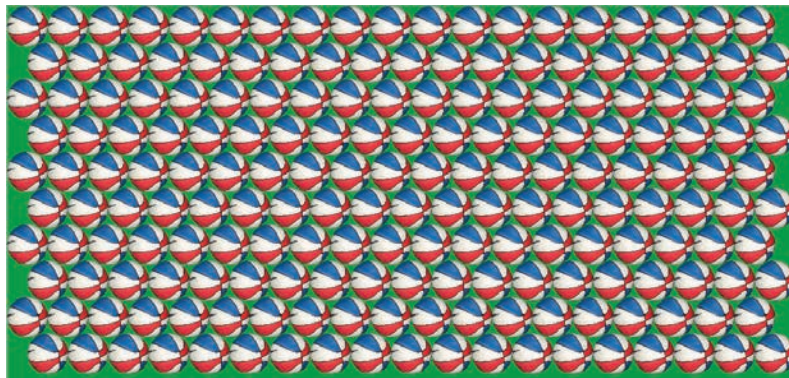
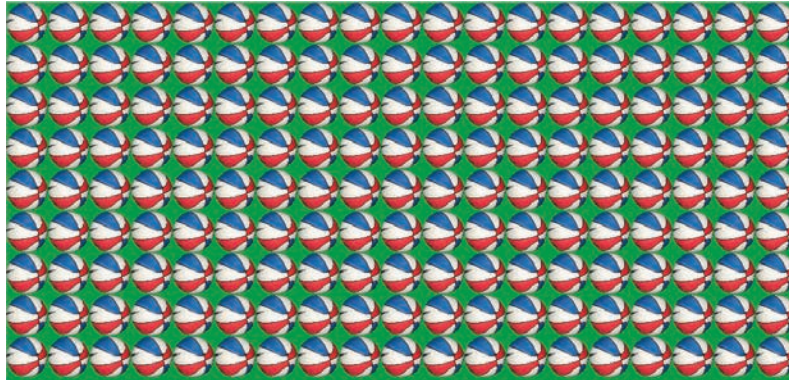
☞ En una de las figuras hay más pelotas que en la otra. ¿En cuál? ¿Cuántas más?

☞ ¿Y si las figuras tuviesen 6 capas? ¿Y si fueran 10 capas? ¿Y en el caso de 100 capas?

Actividades • En una pelota

Baloncesto en el jardín

Como puedes ver en las dos ilustraciones, hemos llenado el jardín con pelotas de baloncesto siguiendo dos patrones distintos.

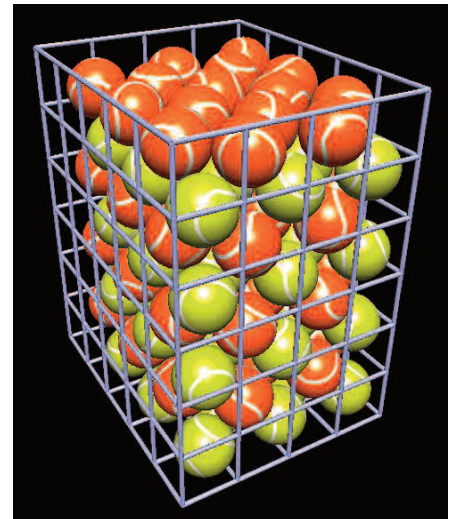
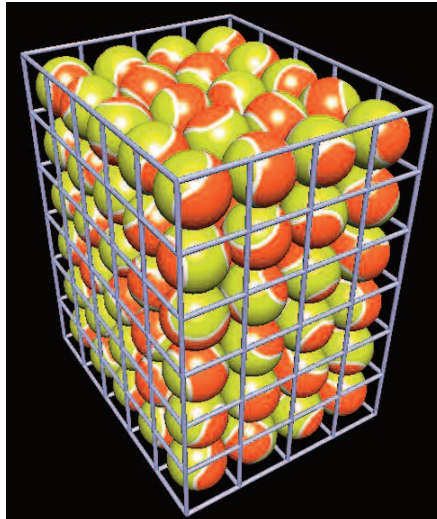
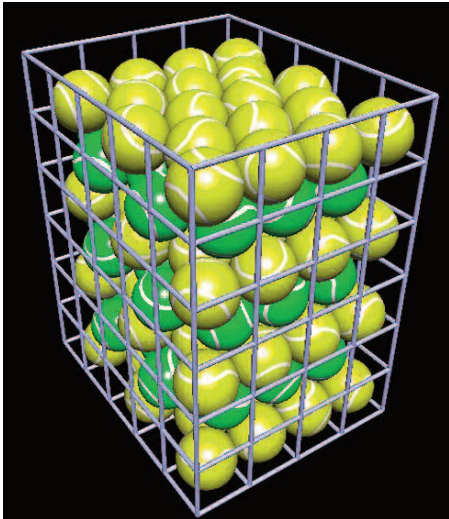


- 👉 Describe las dos maneras de organizar las pelotas.
- 👉 Dibuja un rectángulo en una hoja y llénalo con fichas de parchís siguiendo los dos patrones. ¿Con cuál necesitas más?
- 👉 Si suponemos que el jardín tiene unas dimensiones de $9,5 \text{ m} \times 4,5 \text{ m}$ y que el diámetro de las pelotas es de 50 cm , ¿qué porcentaje de jardín queda libre, en cada caso?
- 👉 ¿Cuál de los dos patrones rellena mejor el jardín?

Actividades • En una pelota

Bolas en una cesta

Estas tres cestas enrejadas son iguales. En ellas se han metido bolas utilizando un sistema distinto para cada una como puedes comprobar observando las ilustraciones.



- ☞ ¿Cuántas bolas hay en cada una de ellas?
- ☞ Si el diámetro de la bola de tenis es 65 mm y las dimensiones de la cesta $260 \times 325 \times 390$ mm, ¿qué porcentaje del volumen de cada cesta está ocupado?
- ☞ Puedes construir dos de las estructuras que ves en las imágenes anteriores con los módulos de pelotas de ping-pong pegadas que tienes a tu disposición. Con los dos módulos de pelotas naranjas (hexagonales) y el de pelotas azules (triangular) puedes construir una, y con los dos módulos de pelotas blancas (triangulares) y las dos pelotas sueltas amarillas, la otra. Como la segunda es más complicada, como ayuda, observa la siguiente foto.



- ☞ Para cada estructura que acabas de construir busca la cesta en la que aparece.

En todas partes, ¡Matemáticas!

Actividades • En una pelota Unas dentro de otras

Como se comenta en el cartel, cuando preguntamos por el número de veces que una pelota de tenis cabe en una de baloncesto o una de ping-pong en una de tenis, hemos de aclarar en primer lugar qué se entiende por «número de veces que cabe». Una de las interpretaciones es que una pelota quepa físicamente dentro de la otra. Así, por ejemplo, una pelota de ping-pong cabe en una de tenis, pero dos, no. El otro significado que se puede dar es que consideremos el volumen, como si la pelota la llenásemos de agua. Y así, en una pelota de tenis cabrán más de dos pelotas de ping-pong. ¿Cuántas realmente?

- ☞ **En primer lugar estima cuantas pelotas de tenis caben físicamente en la de baloncesto. ¿Y de ping-pong? Comprueba tus estimaciones utilizando las pelotas que tienes en la exposición. ¿Te has equivocado mucho?**
- ☞ **Ahora vas a calcular. Mide los diámetros de las pelotas y realiza los cálculos necesarios para hallar sus volúmenes. ¿Cuántas veces puedes vaciar el contenido de una pelota de tenis llena de agua en una de baloncesto? ¿Y cuántas pelotas de ping-pong?**

Actividades • En una pelota

Densidad de las esferas

Un pasatiempo tradicional que se utilizaba en algunos concursos consiste en determinar el número de chicles (con forma de bola) que hay dentro de un gran contenedor de vidrio sin sacarlos del mismo (en algunos casos tampoco se podía tocar el envase). En nuestro caso te vamos a hacer dos propuestas.

Tienes dos recipientes de plástico, uno lleno con bolas amarillas (esferas) del mismo tamaño y el otro con lacasitos. Tu objetivo será estimar cuántas esferas y lacasitos hay. Para ello necesitas una regla y quizá tendrás que pedirle a tu profesor que te recuerde algunas fórmulas o te facilite algún dato. Para ayudarte sería bueno que contestaras las siguientes preguntas.

☞ ¿Qué superficies o volúmenes tengo que calcular?

☞ ¿Sería más fácil si estuvieran los recipientes llenos del todo, sin huecos en su contenido?

Con estos datos:

☞ ¿Están igual de apretadas las esferas que los lacasitos?